

Б. Г. Гребенщиков, О. В. Онегова

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТОКОПРИЕМНИКА ДВИЖУЩЕГОСЯ ЛОКОМОТИВА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С КОНТАКТНЫМ ПРОВОДОМ В НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ БЛИЗОСТИ ОТ ОПОРЫ

Группой ученых и инженеров Оксфордского университета была предложена математическая модель динамического взаимодействия контактного провода и токоприемника локомотива, движущегося с постоянной скоростью v [1]. Изложим вкратце эту модель.

Простая подвеска представляет собой контактный провод, закрепленный непосредственно в опорных точках, расстояние между которыми L , d — величина наибольшего прогиба провода (стрела провеса). Существенным моментом является то, что учитывается факт упругого закрепления контактного провода в точке подвеса. Это означает, что под действием силы нажатия $P(t)$ (неизвестной, подлежащей определению) происходит частичное вертикальное смещение фиксатора [2]. Схема подвески изображена на рис. 1. Полагая силу натяжения провода T постоянной по длине, а смещение

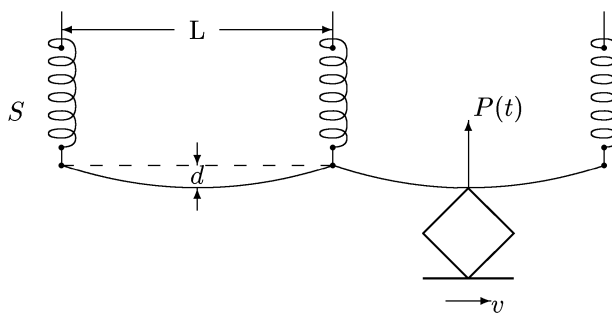


Рис. 1

$Y(x, t)$ перпендикулярным оси OX (ось OY направлена вертикально вниз), учитывая, что на участок провода действуют следующие внешние силы: $P(t)$ (функция времени t), реакция опор, сила сопротивления, пропорциональная скорости движения с коэффициентом пропорциональности η (вязкое трение), проектируя все силы на ось OY , воспользовавшись методом Даламбера

[3], получаем уравнение вертикальных колебаний контактного провода

$$\rho \left(\frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial t^2} + g \right) - EJ \frac{\partial^4 Y(x, t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial Y(x, t)}{\partial t} + s \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} Y(x, t) \delta(x - nL) = P(t) \delta(x - vt). \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность контактного провода на единицу длины; E — модуль Юнга; J — момент инерции поперечного сечения контактного провода; $\delta(x - vt)$ — дельта-функция Дирака [3]; s — коэффициент упругого закрепления. Считаем, что опоры находятся в точках $x = nL$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Токоприемник рассматриваем как систему двух сосредоточенных масс m_1 и m_2 , соединенных между собой подъемной пружиной, причем каждая сосредоточенная масса (масса полоза токоприемника и центр масс рамы токоприемника) снабжена демпфером с коэффициентом демпфирования μ_i ($i = 1, 2$).

Пусть m_1 (масса полоза токоприемника) имеет ординату $y(t)$, m_2 (приведенный центр масс рамы токоприемника) имеет ординату $z(t)$. На полз действуют силы: $P(t)$ (со стороны контактного провода), демпфирующая сила, пропорциональная разности скоростей $v_y - v_z$, упругая сила подъемных пружин, пропорциональная разности ординат $y - z$ (двухмассовая схема токоприемника вместе с действующими на него силами приведена на рис. 2). Тогда, вновь воспользовавшись принципом Даламбера, получаем уравнение

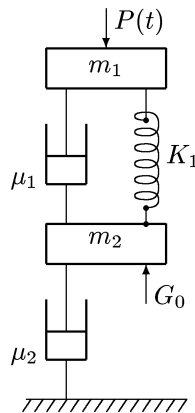


Рис. 2

колебаний полюза

$$m_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \mu_1 \left(\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} \right) + k_1 (y(t) - z(t)) + P(t) = \text{const.} \quad (2)$$

Аналогично для приведенного центра масс получаем уравнение колебаний

$$m_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \mu_2 \frac{dz(t)}{dt} + m_1 g + m_2 g + P(t) = G_0 \quad (3)$$

(здесь G_0 — постоянная сила, действующая со стороны кузова электровоза). Для контактного провода справедливо условие упругого закрепления

$$T \left[\frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0-}^{x=0+} = sY(0, t). \quad (4)$$

Учитывая достаточную гибкость контактного провода, пренебрегая величинами более высокого порядка малости и вводя безразмерные величины x/L вместо x , $Y(x, t)/d$ вместо $Y(x, t)$, PL/Td вместо $P(t)$, наконец, $(vt)/L$ вместо t , получаем более простое уравнение колебаний гиперболического типа

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial x^2} = P(t) \delta(x - t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$Y(t, t) = y(t) - Y_s(t)$, $c^2 = T(\rho v^2)^{-1}$, $c > 1$ (для тех параметров подвески и скорости, которые реально существуют), $0 \leq x \leq 1$. Статический прогиб $Y_s(x)$ определяется уравнением

$$EJ \frac{d^4 Y_s(x)}{dx^4} - \frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} + \frac{\rho g L^2}{Td} = 0. \quad (6)$$

Решением данного обыкновенного дифференциального уравнения (учитывая, что первый член в левой части равенства (6) пренебрежимо мал, а также соотношение $d/L = (\rho g L)/(8T)$, что выполняется для подвески, приведенной в [1]) можно считать параболу вида

$$Y_s(x) = 4(x^2 - |x|) + Y_{s0}, \quad Y_{s0} = -\frac{8T}{Ls}. \quad (7)$$

В новых переменных уравнения (2) и (3) будут иметь вид

$$P(t) = P_0 - b_1 \frac{dz(t)}{dt} - \varepsilon \left(\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right), \quad (8)$$

$$z(t) - y(t) = \varepsilon \left(a_2 P(t) + b_2 \frac{dy(t)}{dt} - b_1 \frac{dz(t)}{dt} + a_1 a_2 \varepsilon \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right), \quad (9)$$

где $\varepsilon = m_2 v^2 (TL)^{-1}$, $a_1 = m_1 (m_2)^{-1}$, $b_1 = \varepsilon \mu_2 L (m_2 v)^{-1}$, $b_2 = \mu_1 v (k_1 L \varepsilon)^{-1}$, $P_0 = 8(G_0 - m_1 g - m_2 g)(\rho L g)^{-1}$ (P_0 — значение силы $P(t)$ в момент прохождения опоры $x = 0$). Граничное условие при $x = 0$ для неоднородного уравнения (5) будет

$$K\varepsilon \left[\frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0-}^{x=0+} = Y(0, t), \quad K\varepsilon = \frac{T}{Ls}, \quad K = \frac{-Y_{s0}}{8\varepsilon} = O(1). \quad (10)$$

Далее, для уравнений (8), (9) справедливы начальные условия

$$[y(t)]_{0-}^{0+} = [z(t)]_{0-}^{0+} = \left[\frac{dy(t)}{dt} \right]_{0-}^{0+} = \left[\frac{dz(t)}{dt} \right]_{0-}^{0+} = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим вначале упрощенную модель, полагая в уравнениях (8), (9) и в граничном условии (10) $\varepsilon = 0$. Воспользуемся фазовой плоскостью (x, t) . Существенным моментом является линия $x = t$ (линия приложения силы $P(t)$). Рассматривая область ⟨1⟩ (рис. 3), ограниченную линией $x = t$, харак-

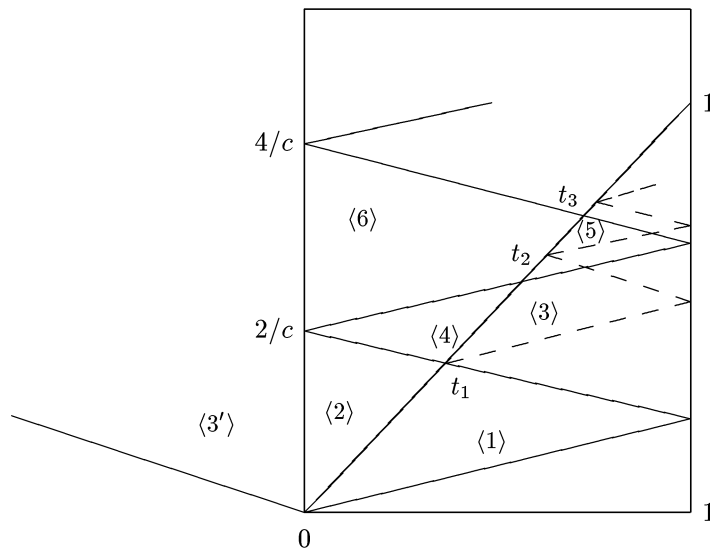


Рис. 3

теристикой $x = ct$ и линией $x + ct - 2 = 0$ (отраженной волной, идущей налево [3]), интегрируя уравнение (5) вдоль линии $x = t$, получаем равенство

$$\left[\frac{\partial Y(x, t)}{\partial t} \right]_{x-t=0-}^{x-t=0+} = \frac{-c^2}{c^2 - 1} P(t). \quad (12)$$

Интегрируя равенство (12) вдоль линии $x = t$, используя метод распространяющихся волн [3], учитывая граничное условие $Y(0, t) = 0$, получаем в области $\langle 1 \rangle$ представление решения в виде

$$Y(x, t) = Y_1 = \frac{c}{2} \left[\Phi \left(\frac{ct - x}{c - 1} \right) - \Phi \left(\frac{ct + x}{c + 1} \right) \right]; \quad Y(0, t) = 0, \quad \frac{d\Phi(t)}{dt} = P(t). \quad (13)$$

В области $\langle 2 \rangle$ уравнение (5) будет уже однородным. Рассматривая решение как наложение бегущей и отраженной волн [3] и приравнявая данное решение при $x = t$ функции $Y_1 : x = t$, получаем равенство

$$Y(x, t) = Y_2 = \frac{c}{2} \left[\Phi \left(\frac{ct + x}{c + 1} \right) - \Phi \left(\frac{ct - x}{c - 1} \right) \right]. \quad (14)$$

Уравнения колебаний токоприемника при $\varepsilon = 0$ имеют вид

$$y = z, \quad P(t) = P_0 - b_1 \frac{dy(t)}{dt}. \quad (15)$$

Выражая $y'(t) = Y'(t, t) = Y'_s(t)$, учитывая выражения (7), (14), получаем для $P(t)$ следующее функциональное уравнение:

$$\left(1 + \frac{b_1 c}{2} \right) P(t) - \frac{\mu c b_1}{2} P(\mu t) = P_0 + 4b_1 - 8b_1 t, \quad 0 < t < \frac{2}{c + 1}, \quad (16)$$

$$\mu = \frac{c - 1}{c + 1}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Его решение (ограничиваясь лишь линейными членами) имеет вид

$$P(t) = \alpha_0 t + \beta_0, \quad 0 < t < \frac{2}{c + 1}, \quad (17)$$

$$\alpha_0 = (-8b_1) \left(1 + \frac{2b_1 c^2}{(c + 1)^2} \right)^{-1}, \quad \beta_0 = (P_0 + 4b_1) \left(1 + \frac{b_1 c}{(c + 1)^2} \right)^{-1}.$$

Далее, в области $\langle 3 \rangle$ фазовой плоскости (x, t) , вследствие возмущения граничного режима [3], получаем решение в виде

$$Y(x, t) = Y_3 = Y_1 = \frac{c}{2} \left[\Phi \left(\frac{ct + x - 2}{c + 1} \right) - \Phi \left(\frac{ct + x - 2}{c - 1} \right) \right], \quad \frac{2}{c + 1} < t < \frac{2}{c - 1}. \quad (18)$$

Методами, аналогичными примененным при выводе уравнения (16), можно получить функциональное уравнение для $P(t)$ при $2/(c + 1) < t < 2/(c - 1)$:

$$\left(1 + \frac{b_1 c}{2} \right) P(t) - \left(\frac{c b_1}{2} \right) \left(\mu P(\mu t) - P(t - \frac{2}{c + 1}) \right) +$$

$$\frac{1}{\mu}P(t/\mu - 2/c - 1) = P_0 + 4b_1 - 8b_1t. \quad (19)$$

Его решение также ищем в виде линейной функции, т.е.

$$P(t) = \alpha_1 t + \beta_1. \quad (20)$$

Вообще, точки встречи отраженной волны (от правой опоры) с линией действия ($x = t$) могут быть вычислены следующим образом:

$$t_n = 1 - \mu^n, \quad t_1 = \frac{2}{c+1}.$$

Поскольку

$$t_n - \frac{2}{c+1} = \mu t_{n-1}, \quad \frac{t_n}{\mu^n} - \frac{2}{c-1} = t_{n-1}, \quad t_{n-1} < \mu t_n < t_n,$$

то $P(\mu t_n)$ непрерывна в любой точке t_n , тогда из (19) получаем равенство

$$\left(1 + \frac{b_1 c}{2}\right) P(t_n) - \frac{b_1 c}{2} \left(\mu P(\mu t_n) + P(\mu t_{n-1}) + \frac{1}{\mu} P(t_{n-1})\right) = P_0 + 4b_1 - 8b_1 t_n, \quad (21)$$

откуда для $P(t_n)$ справедливы соотношения [1]:

$$[P(t)]_{(t_n)_-}^{(t_n)_+} = \mu \gamma [P(t)]_{(t_{n-1})_-}^{(t_{n-1})_+}, \quad [P(t)]_{(t_1)_-}^{(t_1)_+} = \gamma \mu (1 - \mu) \beta_0 : \quad \gamma = \frac{b_1 c}{\mu^2 (2 + b_1 c)},$$

т.е. $P(t)$ терпит разрыв в точках t_n . Дифференцируя функциональное уравнение (19) по t , получаем аналогичными методами соотношения для $P'(t)$:

$$\left[P'(t)\right]_{(t_n)_-}^{(t_n)_+} = \gamma \left[P'(t)\right]_{(t_{n-1})_-}^{(t_{n-1})_+}, \quad \left[P'(t)\right]_{(t_1)_-}^{(t_1)_+} = \gamma (1 - \mu^2) \alpha_0, \quad (22)$$

откуда видно, что в данных точках терпит разрыв и производная от $P(t)$. Вообще, при $t_n < t < t_{n+1}$ $P(t) = \alpha_n t + \beta_n$, где

$$\alpha_n = \alpha_0 \left[1 + (1 - \mu) \sum_{r=1}^n \gamma^r\right],$$

$$\beta_n = \alpha_0 (1 - \mu^2) \sum_{r=1}^n [(\mu \gamma)^r - \gamma^r] + \beta_0 \left[1 + (1 - \mu) \sum_{r=1}^n (\mu \gamma^r)\right]. \quad (23)$$

Очевидно, для сходимости рядов (23) необходимо $\gamma < 1$, что физически означает достаточную малость колебаний токоприемника. Далее, ввиду того, что

при $n \rightarrow \infty$ $t_n \rightarrow 1$, можно вычислить значение силы нажатия на правой опоре: $P(1) = P_1 = \alpha_\infty + \beta_\infty = [\frac{1}{1-\mu\gamma}][\alpha_0(1-\mu^3\gamma) + \beta_0(1-\mu^2\gamma)]$. (Более подробно см. в [1].) Таким образом, сила $P(t)$ терпит разрыв в точке $t = 1$. Но тогда получаем из соотношения (15) разрывность и величины $y'(t)$: $t = 1$, отсюда следует бесконечность ускорения $y^{(2)}(t)$. Следовательно, решение при $\varepsilon = 0$ не будет первым приближением при рассмотрении процесса колебаний токоприемника вблизи опоры. Физически это означает, что мы пренебрегли эластичностью опоры и упростили динамику токоприемника.

Модифицируем наше решение в областях $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 3 \rangle$ следующим образом: решение равно линейной части + пограничные функции [4]. Линейные части внутри каждой области будут выбраны, исходя из равенств (13), (14), (18). Введем так называемые растянутые переменные: $\bar{x} = x/\varepsilon$, $\bar{t} = t/\varepsilon$ и определим решения следующим образом:

$$\frac{1}{\varepsilon}Y(x, t) - \bar{Y}(\bar{x}, \bar{t}) = R_i(\bar{t}, \bar{x}) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (24)$$

где функция $R_1(\bar{t}, \bar{x}) = c\beta_0(c^2 - 1)^{-1}(c\bar{t} - \bar{x})$ определена в области $\langle 1 \rangle$; функция $R_2(\bar{t}, \bar{x}) = c\beta_0(c + 1)^{-1}\bar{x}$ определена в области $\langle 2 \rangle$; функция $R_3(\bar{t}, \bar{x}) = \left(\frac{P_0 - P_1}{b_1} - 4 + \frac{P_1 c}{c - 1}\right)\bar{x}$ определена в области $\langle 3 \rangle'$ — внутренности угла, образованного линией $\bar{x} = 0$ и линией $\bar{x} = c\bar{t}$. Отметим, что движение в отрицательном времени (при $\bar{t} < 0$) невозможно, тем не менее (вследствие того, что начальные данные будут зависеть от него) можно (формально) определить движение и при $\bar{t} < 0$ [1]. Линейная функция $R_1(\bar{t}, \bar{x})$ является линейным членом первого приближения в области $\langle 1 \rangle$ с коэффициентом пропорциональности $P(0) = \beta_0$. Подобным же образом определяются остальные линейные функции в равенстве (24) (более подробно см. в [1]). Далее, аналогично введем следующее соотношение:

$$\frac{1}{\varepsilon}\Phi(t) - \bar{\Phi}(\bar{t}) = \beta_0\bar{t} + d_+, \quad \bar{t} > 0, \quad d_+ = const. \quad (25)$$

Подставим в равенство (22) наши представления (24) в областях $\langle 1 \rangle$ и $\langle 2 \rangle$, а также представление (25). Получаем равенство

$$\left[\frac{\partial \bar{Y}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \right]_{\bar{x}=\bar{t}=0+}^{\bar{x}=\bar{t}=0+} = -\frac{c^2}{c^2 - 1} \frac{d\bar{\Phi}(\bar{t})}{d\bar{t}}. \quad (26)$$

Данное соотношение совпадает с соотношением (12), но последнее является следствием неоднородного уравнения (5). Отсюда следует, что $\bar{Y}(\bar{x}, \bar{t})$ удовлетворяет аналогичному соотношению

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{Y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial^2 \bar{Y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} = \frac{d\bar{\Phi}(\bar{t})}{d\bar{t}} \delta(\bar{x} - \bar{t}). \quad (27)$$

При этом функция $\bar{Y}(\bar{x}, \bar{t})$ будет уже непрерывной в точке $\bar{x} = 0$. Условие упругого закрепления дает следующее граничное условие для уравнения (27):

$$\begin{aligned} \bar{Y}(0, \bar{t}) - K \left[\frac{\partial \bar{Y}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \right]_{\bar{x}=0-}^{x=0+} = \\ = \begin{cases} K [(c\beta_0)(c+1)^{-1} + 4 + (P_1 - P_0)(b_1)^{-1} - (P_1 c)(c-1)^{-1}] = a_+ \\ K [4 + (P_1 - P_0)(b_1)^{-1}] = a_- \end{cases} \quad (28) \end{aligned}$$

Поскольку решение на линии $\bar{x} = \bar{t}$ определено, а при $\bar{x} \neq \bar{t}$ правая часть уравнения (27) равна нулю (с точностью до членов порядка ε), исходя из формулы Даламбера [3], ищем решение в виде

$$\bar{Y}_i(\bar{x}, \bar{t}) = f_i(c\bar{t} - \bar{x}) + g_i(c\bar{t} + \bar{x}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (29)$$

Потребовав равенства прогиба $\bar{Y}_i(\bar{t}, \bar{x})$ нулю при достаточно больших \bar{x} , \bar{t} вдоль характеристик $c\bar{t} \pm \bar{x} = const$, учитывая непрерывность решений на границах областей, получаем для $\bar{t} > 0$

$$f_1(c\bar{t} - \bar{t}) + g_1(c\bar{t} + \bar{t}) = f_2(c\bar{t} - \bar{t}) + g_2(c\bar{t} + \bar{t}), \quad \bar{x} = \bar{t}, \quad (30)$$

$$g'_1(c\bar{t} + \bar{t}) - f'_1(c\bar{t} - \bar{t}) - g'_2(c\bar{t} + \bar{t}) + f'_2(c\bar{t} - \bar{t}) = -\frac{c^2}{c^2 - 1} \frac{d\bar{\Phi}(\bar{t})}{d\bar{t}}. \quad (31)$$

Последнее равенство получается из соотношения (26). Тогда из равенств (30), (31) получаем соотношения

$$(f'_2(c\bar{t} - \bar{t}) - f'_1(c\bar{t} - \bar{t})) \frac{2c}{c+1} - \left(\frac{c^2}{c^2 - 1} \right) \frac{d\Phi(\bar{t})}{d\bar{t}}, \quad (32)$$

$$f_1(c\bar{t} - \bar{t}) - f_2(c\bar{t} - \bar{t}) = \frac{c}{2} \Phi(\bar{t}). \quad (33)$$

Равенство (33) получается однородным за счет выбора константы d_+ .

На опоре $\bar{x} = 0$ получаем равенство

$$f_3 + g_3 = f_2 + g_2 = K (g'_2 - f'_2 - g'_3 + f'_3) + a_+.$$

Это приводит к соотношению

$$2K f'_2 + f_2 + g_2 = a_+, \quad \bar{x} = 0. \quad (34)$$

Вводя с точностью до малых порядка ε величину

$$\frac{1}{\varepsilon} y(t) - \bar{y}(\bar{t}) = -4\bar{t} + (c\beta_0)(c+1)^{-1}\bar{t} + a_+, \quad (35)$$

учитывая соотношение (7), окончательно получаем уравнение с запаздыванием, линейно зависящим от времени \bar{t} ,

$$\left(1 + \left(\frac{2K}{c-1}\right) \frac{d}{d\bar{t}}\right) \left(\bar{y}(\bar{t}) - \frac{c}{2}\bar{\Phi}(\bar{t})\right) + \frac{c}{2}\bar{\Phi}(\mu\bar{t}) = 0. \quad (36)$$

Если мы сейчас введем величину $\bar{z}(\bar{t})$

$$\frac{1}{\varepsilon}z(t) - \bar{z}(\bar{t}) = -4\bar{t} + (c\beta_0\bar{t})(c+1)^{-1} + b_+, \quad \bar{t} > 0, \quad (37)$$

то уравнения колебаний токоприемника (8) и (9) в новых переменных $\bar{\Phi}, \bar{z}, \bar{y}$ с точностью до малых порядка ε будут иметь вид

$$\frac{d\bar{\Phi}(\bar{t})}{d\bar{t}} + b_1 \frac{d\bar{z}(\bar{t})}{d\bar{t}} + \frac{d^2\bar{z}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} + a_1 \frac{d^2\bar{y}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} = 0, \quad (38)$$

$$\bar{y} - \bar{z} + a_2 \frac{d\bar{\Phi}(\bar{t})}{d\bar{t}} + b_2 \frac{d\bar{y}(\bar{t})}{d\bar{t}} - b_1 \frac{d\bar{z}(\bar{t})}{d\bar{t}} - a_1 a_2 \frac{d^2\bar{y}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} = 0. \quad (39)$$

Уравнение (39) будет однородным за счет выбора констант a_+ и b_+ , именно, $b_+ = a_+ + a_2\beta_0$ (это возможно вследствие того, что большинство констант мы выбирали произвольно [1]). Рассмотрим уравнение (38). Его порядок можно понизить за счет выбора констант d_+ : $\bar{t} > 0$ и d_- : $\bar{t} < 0$ [1]. Получаем равенство

$$\bar{\Phi}(\bar{t}) + b_1\bar{z}(\bar{t}) + \frac{d\bar{z}(\bar{t})}{d\bar{t}} + a_1 \frac{d\bar{y}(\bar{t})}{d\bar{t}} = 0. \quad (40)$$

Вводя переменную $\bar{\omega}(\bar{t}) = -a_1 a_2 \frac{d\bar{y}(\bar{t})}{d\bar{t}} - a_2 \bar{\Phi}(\bar{t})$ и обозначив $u^* = (\bar{\Phi}, \bar{z}, \bar{y}, \bar{\omega})$, получаем стационарную линейную систему четвертого порядка с запаздыванием $\tau(\bar{t}) = (1 - \mu)\bar{t}$ (линейно зависящим от времени \bar{t}):

$$\frac{du(\bar{t})}{d\bar{t}} = Au(\bar{t}) + Bu(\mu\bar{t}) : u(0) = u_0, \quad 0 < \bar{t} \leq \frac{t_1}{\varepsilon}, \quad (41)$$

где матрица A определяется следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} (c-1)/2K - 2/ca_1 & 0 & (c-1)/cK & -2/ca_1 a_2 \\ 0 & -b_1 & 0 & 1/a_2 \\ -1/a_1 & 0 & 0 & -1/a_1 a_2 \\ -b_2/a_1 & b_1 b_2 - 1 & 10 & -b_2(1+a_1)/a_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица B , в свою очередь, имеет следующие компоненты:

$$b_{11} = \frac{c-1}{2K}, \quad b_{ij} = 0 \quad \text{при } i+j > 1.$$

Начальные условия вектор-функции $u(\bar{t}) = u_0$ заданы в точке $\bar{t} = 0$ и определяются следующим образом (более подробно см. в [1,5]):

$$u(0) = (P_1 - \beta_0) \left(\frac{1 + a_1}{b_1} - b_1 a_2, \quad a_2, \quad 0, \quad b_1(a_2)^2 - \frac{a_2}{b_1} \right)^* + \\ + cK \left(\frac{P_1}{c-1} - \frac{\beta_0}{c+1} \right) (-b_1, \quad 1, \quad 1, \quad b_1 a_2)^*,$$

где * означает транспонирование вектора.

Результаты расчетов

Системы с линейным запаздыванием не интегрируются в квадратурах [6,7]. Между тем в данной конкретной задаче требуется эффективно решать систему (41) на достаточно большом промежутке времени $[0, t_1/\varepsilon]$. Рассмотрим реальные параметры подвески, применяемой на железных дорогах Великобритании [1], и скорость движения локомотива $v = 29$ м/с. Матрица A имеет следующие компоненты:

$$A = \begin{pmatrix} -1.41 & 0 & 0.254 & -0.304 \\ 0 & -0.095 & 0 & 0.376 \\ -1.9 & 0 & 0 & -0.715 \\ -1.08 & -0.946 & 1 & -0.622 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения λ будут:

$$\lambda_1 = -0.71; \quad \lambda_2 = -0.35; \quad \lambda_3 = -0.55 + 0.75i; \quad \lambda_4 = 0.55 - 0.75i \quad (42)$$

(i — мнимая единица), т.е. их имеют вещественные части отрицательны. Матрица $A^{-1}B$, в свою очередь, имеет следующие компоненты:

$$\bar{b}_{11} = 0.183; \quad \bar{b}_{21} = \bar{b}_{31} = -1.917; \quad \bar{b}_{41} = -0.488,$$

а остальные компоненты равны нулю. Ее собственными значениями ρ являются величины

$$\rho_1 = 0.183; \quad \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0. \quad (43)$$

Возникает вопрос об устойчивости движения токоприемника при прохождении опоры. В работе [6] было показано, что при выполнении совокупности условий $Re \lambda < 0$ и $|\rho| < 1$ система (41) асимптотически устойчива, причем ее решение стремится к нулю при $\bar{t} \rightarrow \infty$ как степенная функция времени \bar{t} . Более того, для достаточно больших \bar{t} справедливо асимптотическое равенство

$$u(\bar{t}) \approx -A^{-1}Bu(\mu\bar{t}), \quad (44)$$

что также следует из работы [6]. Вкратце заметим, что это вытекает из того факта, что линейное запаздывание для систем с постоянными коэффициентами лишь разрушает устойчивость [7]), а поскольку $u'(\bar{t})$ удовлетворяет следующему уравнению (с тем же самым линейным запаздыванием $\tau(\bar{t}) = (1 - \mu)\bar{t}$):

$$\frac{d(u'(\bar{t}))}{d\bar{t}} = Au'(\bar{t}) + \mu Bu'(\mu\bar{t}), \quad (45)$$

то здесь матрица коэффициентов при запаздывающих членах является более малой величиной, нежели матрица B ; собственные значения матрицы $\mu A^{-1}B$ будут $\mu\rho$, т. е. также по модулю меньше единицы. Ввиду того что матрица A имеет собственные значения с отрицательной вещественной частью, система (45) также асимптотически устойчива, однако ее решение стремится к нулю быстрее, нежели решение системы (41), следовательно, для достаточно больших $\bar{t} > 0$ справедливо асимптотическое представление (44). Для эффективного представления о поведении решения системы (41) можно предложить численное решение. Нас будет особо интересовать поведение функций $\bar{y}(\bar{t})$ и $\bar{P}(\bar{t})$, поскольку первая величина характеризует вертикальные колебания токоприемника, а вторая — силу нажатия токоприемника на контактный провод. В непосредственной близости от опоры (т. е. при малых $\bar{t} > 0$) решение ищем в виде ряда по степеням \bar{t} :

$$u(\bar{t}) = u(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (\bar{t})^i. \quad (46)$$

Подставляя ряд (46) в систему (41), получаем соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (A + B)u(0), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(A + \mu B)\alpha_1, \quad \dots, \\ \alpha_n &= \frac{1}{n}(A + \mu^{n-1}B)\alpha_{n-1}, \dots \end{aligned} \quad (47)$$

Ряд (46) хорошо сходится при $\bar{t} \leq 1$, однако при $\bar{t} > 1$ приходится привлекать достаточно большое число членов; вследствие того что $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, при достаточно больших n члены, мало влияющие на поведение решения, при небольших \bar{t} при $\bar{t} \gg 1$ становятся доминирующими, таким образом, при пренебрежении остатком ряда возрастает погрешность вычисления решения.

Ввиду сказанного выше возникает проблема нахождения численного решения данной задачи. Оно было получено с помощью программ пакета TIME-DELAY TOOLBOX [8], основанных на алгоритмах, приведенных в работе [9]. Данный пакет предназначен для решения функционально-

дифференциальных уравнений (ФДУ) общего вида, в том числе с переменным запаздыванием:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = f(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t - \tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0, \quad (48)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x}^0, \quad x(t_0 + \zeta) = \phi(\zeta), \quad -\tau(t) \leq \zeta < 0;$$

частного случая — линейных ФДУ, содержащих сосредоточенные и распределенные запаздывания

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A_0(t) + \sum_{i=1}^m A_i(t) \hat{x}(t - \tau_i(t)) + \int_{-\tau(t)}^0 F(t, s) \hat{x}(t + s) ds,$$

а также для решения некоторых задач управления и стабилизации систем с запаздыванием. При решении систем ФДУ применяется аналог метода Рунге–Кутты–Фельберга 4(5) порядка [10] с интерполяцией вырожденными сплайнами четвертой степени, экстраполяцией продолжением [9] и с автоматическим выбором шага. Вкратце поясним его суть. Введем численную модель системы (41), обозначив приближенное решение данной системы $w(\bar{t})$. Пусть $w_n = w(\bar{t}_n)$: $0 = \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_n < \bar{t}_{n+1}$; $\Delta_n = \bar{t}_n - \bar{t}_{n-1}$, Δ_n — шаг, длина которого автоматически меняется в зависимости от колеблемости решения. Пусть $w_\tau(\bar{t}_n) = w(\bar{t}_n + \zeta)$: $(\mu - 1)\bar{t}_n \leq \zeta < 0$. Имеем следующий алгоритм нахождения w_n :

$$w_0 = u_0, \quad w_{n+1} = w_n + \Delta_n \sum_{i=1}^6 \sigma_i h_i(w_n, w_\tau(\bar{t}_n)), \quad (49)$$

$$h_i(w_n, w_\tau(\bar{t}_n)) = A \left(w_n + \Delta_n \sum_{j=1}^{i-1} \hat{b}_{ij} h_j(w_n, w_\tau(\bar{t}_n)) \right) + B w_\tau(\bar{t}_n + a_i \Delta_n),$$

$a_i, \hat{b}_{ij}, \sigma_i$ — коэффициенты, численные значения которых приведены, например, в [10]; $w_\tau(\bar{t}_n)$ — предыстория модели, определяемая соотношениями

$$w_\tau(\bar{t}_n) = \begin{cases} I(\{w_i\}_n) : \bar{t}_n - (1 - \mu)\bar{t} \leq \bar{t} + \zeta < \bar{t}_n, \\ E(\{w_i\}_n) : \bar{t}_n \leq \bar{t} + \zeta \leq \bar{t}_n + [\max_i |a_i|] \Delta_n. \end{cases}$$

Здесь I — оператор интерполирования; E — оператор экстраполирования; более подробно см., например, в [9].

Программы реализованы с помощью системы MATLAB. Приведены графики колебаний ползаа токоприемника $\bar{y}(\bar{t})$ (рис. 4), а также силы нажатия $\bar{P}(\bar{t})$ (рис. 5); отметим, что последний совпадает с аналогичным графиком, полученным ранее в [1].

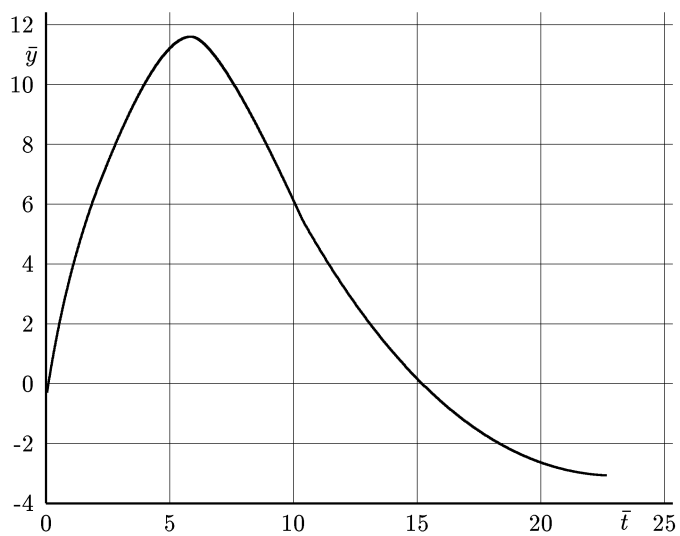


Рис. 4

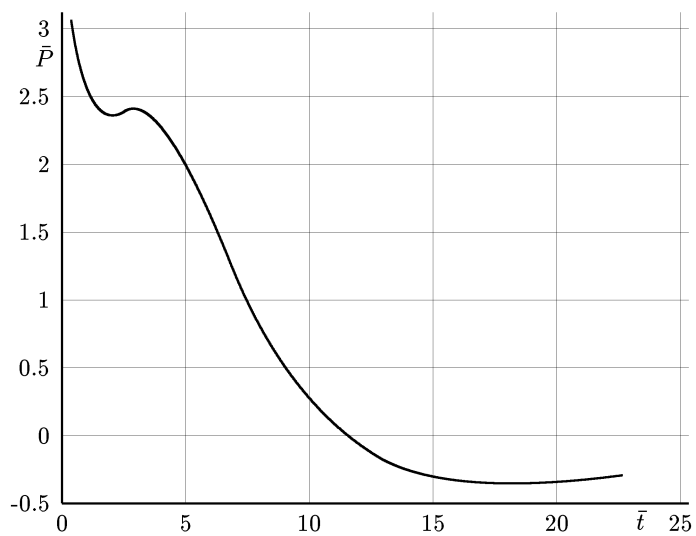


Рис. 5

Выводы

1. Математическая модель взаимодействия токоприемника движущегося локомотива с контактным проводом предполагает анализ (а также численный расчет) стационарной линейной системы дифференциальных уравнений четвертого порядка с запаздыванием, линейно зависящим от времени (аргумента).

2. Асимптотические методы, разработанные ранее одним из авторов, позволяют при достаточно больших значениях аргумента (времени) исследовать асимптотическое поведение решения (как решение разностной системы).

3. При анализе решения исходной системы с линейным запаздыванием на конечном (но достаточно большом) промежутке времени можно эффективно использовать численные методы, предложенные в данной статье.

Литература

1. OCKENDON J., TAYLOR A. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1971. Vol.322. P.447–468.
2. МАРКВАРДТ Н. Г., ВЛАСОВ И. И. Контактная сеть. М: Наука, 1978.
3. ТИХОНОВ А. Н., САМАРСКИЙ А. А. Уравнения математической физики. М: Наука, 1966.
4. ВАСИЛЬЕВА А. Б., БУТУЗОВ В. Ф. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М: Наука, 1973.
5. ГРЕБЕНЩИКОВ Б. Г., ЕФИМОВ А. В. К вопросу о расчете динамического взаимодействия контактной подвески и токоприемника. Деп. в ЦНИИТЭИ МПС. №4034. 1987.
6. ГРЕБЕНЩИКОВ Б. Г., РОЖКОВ В. И. Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 5. С. 751–758.
7. ГРЕБЕНЩИКОВ Б. Г. Устойчивость систем с переменным запаздыванием, линейно зависящим от времени // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: УрГУ, 1983. С.25–34.
8. КИМ А. В., ПИМЕНОВ В. Г. О применении i -гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т.5. С.104–125.
9. ПИМЕНОВ В.Г. Функционально-дифференциальные уравнения. Численные методы. Екатеринбург: УрГУ, 1998.
10. ХАЙРЕР Э., НЕРСЕТТ С., ВАННЕР Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Наука, 1990.

*Статья поступила 12.05.1999 г.;
окончательный вариант 25.06.1999 г.*